FUNGSI GELOMBANG SPIN SIMETRI UNTUK POTENSIAL SCARF HIPERBOLIK PLUS COULOMB LIKE TENSOR DENGAN MENGGUNAKAN METODE POLYNOMIAL ROMANOVSKI

Oleh:

Alpiana Hidayatulloh

Dosen Tetap pada Fakultas Teknik UNTB

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan fungsi gelombang dari persamaan Dirac untuk potensial Scarf trigonometrik plus potensial tensor tipe coulomb untuk kasus spin symetri dengan menggunakan metode Polynomial Romanovski . Penyelesaian persamaan Dirac dengan Polynomial Romanovski dilakukan dengan cara mereduksi persamaan differensial orde dua menjadi persamaan differensial tipe Hipergeometri melalui substitusi variabel dan fungsi gelombang yang sesuai. Dengan membandingkan persamaan differensial orde dua tipe Hipergeometri dengan persamaan differensial standar untuk Polynomial Romanovski diperoleh persamaan energi relativistic dan fungsi bobot. Fungsi gelombang relativistik diperoleh dari fungsi bobot dan dinyatakan dalam bentuk polynomial romanovski. Karena hasil energinya tidak bisa diselesaikan secara analitik, maka energy relativistic diperoleh dengan metode numerik menggunakan Matlab 2011.

Kata-kata kunci: Persamaan Dirac, Potensial Scarf Hiperbolik, Pseudospin symetri, Coulomb like tensor, metode Polynomial Romanovski

PENDAHULUAN

Pada fisika partikel, persamaan dirac merupakan persamaan gelombang relativistik yang diformulasikan oleh ahli ilmu fisika inggris paul dirac pada tahun 1928. Persamaan dirac selalu mendiskripsikan partikel dinamik spin ½ pada mekanika kuantum. Persamaan Pencarian solusi yang tepat dari persamaan Dirac dengan berbagai potensi fisik memainkan peran penting dalam fisika nuklir dan bidang terkait lainnya. Dengan menggunakan metode yang berbeda, pencarian solusi yang tepat persamaan Dirac dengan potensial Spin dan pseudo berputar. Pada penelitian sebelumnya persamaan dirac diselesaikan secara analitis untuk beberapa potensial seperti jenis potensial seperti Woods – Saxon, Hulthen, Eckart, Hylleraas, dan Manning – Rosen. Dan berbagai metode telah diadopsi untuk mencari solusi dari persamaan Dirac Metode ini termasuk metode faktorisasi, metode aljabar , mekanika kuantum metode Supersymmetrik , metode iterasi asimtotik , metode Nikiforov - Uvarov dan lain-lain.

METODE

a. Persamaan Dirac untuk spin Simetri

Persamaan Dirac digunakan untuk mendeskripsikan partikel yang berspin ½ atau kelipatannya dalam mekanika kuantum. Pada persamaan Dirac, untuk kasus spin simetri berlaku bahwa selisih antara potensial vektor V(r) dan potensial skalar S(r) adalah konstan dan jumlahnya sama dengan potensial yang mempengaruhi sistem sedangkan untuk kasus spseudospin simetri berlaku jumlah antara potensial vektor V(r) dan r potensial skala S(r) adalah konstan dan selisihnya sama dengan potensial yang mempengaruhi sistem.

Persamaan Dirac untuk potensial vektor V(r) dan skalar S(r) dituliskan sebagai berikut:

$$[c\vec{\alpha}.\vec{p}+\beta(Mc^2+S(\vec{r}))-i\beta\vec{\alpha}.\hat{r}U(r)]\Psi(\vec{r})=[E-V(\vec{r})]\Psi(\vec{r}) \quad (1)$$

(1)

Dimana , $\vec{p}=-i\hbar\nabla$, $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$ (2)

Dengan σ adalah matrik tiga dimensi Pauli, I adalah matriks identitas 2×2. Jika nilai $\hbar=c=1$. Dan spin Dirac dituliska sebagai berikut:

$$\psi(\vec{r})=\begin{pmatrix}\varphi(\vec{r})\\ \chi(\vec{r})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{F_{nk}(r)}{r}Y_{jm}^{l}(\theta,\emptyset)\\ i\frac{G_{nk}(r)}{r}Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\emptyset)\end{pmatrix} \quad (3)$$

Dimana $\varphi(\vec{r})$ adalah spin Dirac arah atas dan $\chi(\vec{r})$ adalah spin Dirac arah bawah. $Y_{jm}^{l}(\theta,\emptyset)$ adalah

spin bola harmonik dan $Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\emptyset)$ adalah pseudospin simetri bola harmonik.
Dengan memasukkan persamaan (2) dan (3) didapatkan

$$\left\{\frac{d}{dr}+\frac{K}{r}-U(r)\right\}F_{nk}(r)=\left(M+E_{nk}-\Delta(r)\right)(M-E_{nk}+\Sigma(r))F_{nk}(r) \quad (4)$$

$$\left\{\frac{d}{dr}-\frac{K}{r}-U(r)\right\}G_{nk}(r)=\left(M-E_{nk}+\Delta(r)\right)(M-E_{nk}+\Sigma(r))G_{nk} \quad (5)$$

$F_{nk}(r)$ adalah komponen arah atas dan $G_{nk}(r)$ adalah komponen arah bawah, sehingga kita mendapakan persamaan spin simetri dan pseudopin simetri masing-masing dituliskan sebagai berikut:
Untuk spin simetri

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{K(K+1)}{r^2}+\frac{2k}{r}U(r)-\frac{dU(r)}{dr}-U^2(r)\right\}F_{nk}(r)=\left(M+E_{nk}+\Delta(r)\right)(M-E_{nk}+\Sigma(r))F_{nk}(r) \quad (6)$$

Dan

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{K(K-1)}{r^2}+\frac{2k}{r}U(r)-\frac{dU(r)}{dr}+U^2(r)\right\}G_{nk}(r)=\left(M+E_{nk}+\Delta(r)\right)(M-E_{nk}+\Sigma(r))G_{nk}(r) \quad (7)$$

Dimana $K(K+1)=l(l+1)$ adalah komponen spin arah atas dan $K(K-1)=l(l-1)$ adalah komponen spin arah bawah. Untuk spin symetri memiliki $\Delta(r)=c$ dan $\Sigma(r)$ merupakan potensial yang mempengaruhi sistem. Sedangkan pseudospin simetri memiliki $\Sigma(r)=c$ dan $\Delta(r)$ merupakan potensial yang mempengaruhi system.

Metode penyelesaian persamaan diferensial orde dua yang belum banyak diaplikasikan untuk penyelesaian persamaan schrodinger adalah menggunakan polynomial Romanovski.
Persamaan Schrodinger satu dimensi untuk potensial shape invariance dapat diubah menjadi persamaan diferensial orde dua fungsi Hipergeometri dengan substitusi variabel yang sesuai. Bentuk dari Persamaan Schrodinger satu dimensi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x) \quad (8)$$

Persamaan tipe Hipergeometri yang diperoleh dari persamaan schrodinger (8) dengan substitusi variabel yang sesuai, dimana tipe umum persamaan Hipergeometri adalah:

$$\frac{\partial^2\psi(s)}{\partial s^2}+\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}\frac{\partial\psi(s)}{\partial s}+\frac{\sigma(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s)=0 \quad (9)$$

Persamaan diferensial tipe Hipergeometri yang dapat diselesaikan dengan menggunakan polynomial Romanovski yang mula-mula diusulkan oleh S.J Routh dan kemudian dikembangkan oleh Romanovski, pers

$$\sigma\frac{\partial^2 y_n}{\partial s^2}+\tau\frac{\partial y_n}{\partial s}+\lambda y_n \quad (10)$$

Dengan $\sigma(s)=ax^2+bx+c;$ $\tau=dx+e$ dan $-\{n(n-1)+2n(1-p)\}=\lambda=\lambda_n$
Dan $y_n=R_n{}^{(p,q)}(s)=D_n{}^{(\beta,\alpha)}(s)$
Dimana persamaan (10) adalah persamaan yang self-adjoint dan fungsi bobotnya dinyatakan sebagai w(x) memenuhi persamaan diferensial pearson yang disajikan sebagai:

$$\frac{d(\sigma(x)w(x))}{dx}=\tau(x)w(x) \quad (11)$$

Fungsi bobot yang diperoleh dari penyelesaian differensial pada persamaan (11) adalah

$$w(x)=exp\int\frac{(d-2a)x+(e-b)}{ax^2+bx+c} \quad (12)$$

Persamaan (12) diatas disusun dari persamaan rodrigues yang dinyatakan sebagai

$$D_n^{(p,q)}(z)=\frac{1}{w(z)}\frac{d^n}{dz^n}((az^2+bz+c)^n w(z)) \quad (13)$$

Dengan nilai-nilai parameter pada persamaan (13) adalah
$a=I, b=0, c=I, d=2(1-p)$ dan $e=q$ dengan $p>0$
Dengan memasukkan nilai parameternya ke persamaan (13) maka didapatkan fungsi bobot, yaitu:

$$w(x)=(1+z^2)^2 e^{q tan^{-1}}(z) \quad (14)$$

Dengan memasukkan nilai , τ dan λ dan nilai parameternya pada persamaan (12) maka didapatkan bentuk Persamaan diferensial polynomial Romanovski

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 R_n{}^{p,q}(x)}{\partial x^2}+\{2x(-p+1)+q\}\frac{\partial R_n{}^{p,q}(x)}{\partial x}-\{n(n-1)+2n(1-p)\}R_n{}^{p,q}(x)=0 \quad (15)$$

Dan untuk penyelesaian persamaan fungsi gelombang pada polynomial Romanovski adalah:

$$F_n=(1+z^2)^{-\frac{\beta}{2}}e^{\frac{\alpha}{2}tan^{-1}(z)}D_n^{(p,q)}(z) \quad (16)$$

Dengan memasukkan persamaan fungsi gelombang pada persamaan (14) kedalam persamaan (13) dan memasukkan nilai parameternya maka didapatkan fungsi bobotnya yaitu:

$$D_n^{(p,q)}(z) = D_n^{(p,q)}(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{-p} e^{q\tan^{-1}}} \frac{d^n}{dz^n}[(1+z^2)^n (1+z^2)^{-p} e^{q\tan^{-1}}] \quad (17)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Adapun bentuk fungsi gelombang scarf hiperbolik adalah sebagai berikut:

$$F_{nk} = (1+z^2)^{\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}\tan^{-1}(z)} D \quad (18)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)+B} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)-B}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\alpha = -i\left(\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)+B} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)-B}\right)$$

Maka persamaan (18) menjadi

$$F_{nk} = (1+z^2)^{\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)+B} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)-B}\right)+\frac{1}{2}}{2}} e^{-\frac{-i\left(\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)+B}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)-B}\right)}{2}\tan^{-1}(z)}$$

$$= (1-\cosh(ar))^{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)+B}+\frac{1}{4}}$$

$$(1+\cosh(ar))^{-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)-B}+\frac{1}{4}} D \quad (20)$$

Variabel D pada persamaan (20) dapat dicari dengan menggunaka

Dengan $D_n = R_n$

Maka

$$R_n = \frac{1}{w}\frac{d^n}{dx^n}\left(w(1+z^2)^n\right) \quad (21)$$

Dengan

$$w(s) = (1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}} e^{-\alpha\tan^{-1}(z)} \quad (22)$$

Dengan memasukkan persamaan (22) ke pers (21) maka didapatkan:

$$R_n = \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}} e^{-\alpha\tan^{-1}(z)}}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left((1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}} e^{-\alpha\tan^{-1}(z)} (1+z^2)^n\right) \quad (23)$$

Untuk n = 0 maka pers (23) menjadi

$$R_0 = \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}} e^{-\alpha\tan^{-1}(z)}}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left((1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}} e^{-\alpha\tan^{-1}(z)} (1+z^2)^n\right)$$

$$= \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}} e^{-\alpha\tan^{-1}(z)}}$$

$$\frac{d^0}{dz^0}\left((1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}} e^{-\alpha\tan^{-1}(z)} (1+z^2)^0\right)$$

$$= 1 \quad (24)$$

Dengan memasukkan pers (24) kepers (18) maka didapatkan fungsi gelombang untuk n = 0 adalah

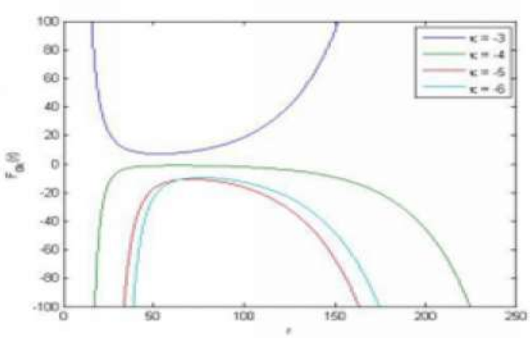
$$F_{0k} = (1+z^2)^{\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}\tan^{-1}(z)} D_0$$

$$= (1+z^2)^{\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}\tan^{-1}(z)} 1$$

$$= (1+\cosh(ar))^{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)+B}+\frac{1}{4}}$$

$$(1-\cosh(ar))^{-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)-B}+\frac{1}{4}} \quad (25)$$

Adapun bentuk gelombang pers (25) dengan variasi nilai kappa



Untuk n = 1 maka persamaan (23) menjadi

Untuk R_1

$$R_1 = \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}} e^{-\alpha\tan^{-1}(z)}}$$

$$\frac{d}{dz}\left((1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}+1} e^{-\alpha\tan^{-1}(z)}\right)$$

$$= \left(2z\left(\frac{2\beta-1}{2}+1\right)-\alpha\right) \quad (25)$$

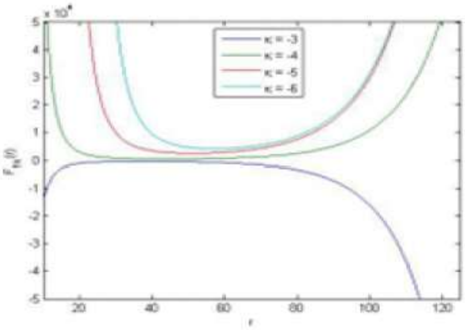
Dengan memasukkan pers (25) kepers (18) maka didapatkan fungsi gelombang untuk n = 1 adalah

$$F_{1k} = (1+z^2)^{\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}\tan^{-1}(z)} D_1$$

$$= (1+\cosh(ar))^{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)+B}+\frac{1}{4}}$$

$$(1-\cosh(ar))^{-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)-B+\frac{1}{4}}}\left(2z\left(\frac{2\beta-1}{2}+1\right)-\alpha\right) \quad (26)$$

Adapun bentuk gelombang pers (25) d engan variasi nilai kappa



Untuk R_2

$$R_2=\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}}e^{-\alpha tan^{-1}(z)}}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left((1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}}e^{-\alpha tan^{-1}(z)}(1+z^2)^2\right)$$

$$=\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}}e^{-\alpha tan^{-1}(z)}}$$

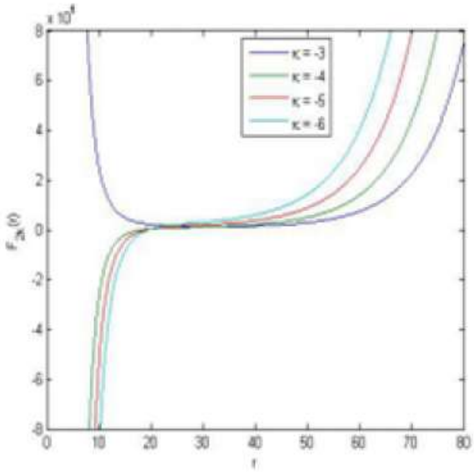
$$\frac{d^2}{dz^2}\left((1+z^2)^{\frac{2\beta-1}{2}+2}e^{-\alpha tan^{-1}(z)}\right)$$

$$=z\left(\frac{2\beta-1}{2}+2\right)(1+z^2)^{-\beta+1}$$
$$+4z^2\left(\frac{2\beta-1}{2}+2\right)\left(\frac{2\beta-1}{2}+1\right)$$
$$-2z\alpha\left(\frac{2\beta-1}{2}+1\right)+\alpha^2 \quad (27)$$

Dengan memasukkan pers (27) kepers (18) maka didapatkan fungsi gelombang untuk n = 2 adalah

$$F_{2k}=(1+z^2)^{\frac{\beta}{2}}e^{-\frac{\alpha}{2}tan^{-1}(z)}D_2$$
$$=(1+cosh(ar))^{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)+B+\frac{1}{4}}}$$
$$(1-\cosh(ar))^{-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}+A\right)-B+\frac{1}{4}}}$$
$$z\left(\frac{2\beta-1}{2}+2\right)(1+z^2)^{-\beta+1}$$
$$+4z^2\left(\frac{2\beta-1}{2}+2\right)\left(\frac{2\beta-1}{2}+1\right)$$
$$-2z\alpha\left(\frac{2\beta-1}{2}+1\right)+\alpha^2 \quad (28)$$

Adapun bentuk gelombang pers (28) dengan variasi nilai kappa



PENUTUP

Penyelesaian persamaan Dirac dengan polinomial Romanovski dilakukan dengan cara mereduksi persamaan differensial orde dua menjadi persamaan differensial tipe Hipergeometri melalui substitusi variabel dan fungsi gelombang yang sesuai.Dengan membandingkan persamaan differensial orde dua tipe Hipergeometri dengan persamaan differensial standar untuk Polynomial Romanovski diperoleh persamaan energi relativistik dan fungsi bobot. Fungsi gelombang relativistik diperoleh dari fungsi bobot dan dinyatakan dalam bentuk polynomial Romanovski. Karena hasil energinya tidak bisa diselesaikan secara analitik, maka energi relativistik diperoleh dengan metode numerik menggunakan Matlab 2011. Untuk n = 0 semakin kecil nilai kappanya maka amplitudonya semakin besar, untuk n = 1 semakin besar kappa maka amplitudonya semakin besar. Sedangkan untuk n = 2 nilai fungsi gelombang sama dengan ketika n = 0 semakin kecil nilai kappanya maka amplitudonya semakin besar.

DAFTAR PUSTAKA

A.Suparmi, C.Cari and U.A. Deta, Exact Solution of Dirac Equation for Scarf Potential with New Tensor Coupling Potential for spin and Pseudospin Symmetri Using Romanovski Polynomial, diterima untuk dipublikasikan pada journal Chinese Physics B sebagai artikel no. 140287 akan dipublikasikan pada juli 2014 hal 12.

A.suparmi,and C,Cari, Solution of Dirac Equation for q-Deformed Eckart Potential with Yukawa-type Tensor Interaction for Spin and Pseudospin Symmetry Using Romanovski Polynomial, *Atom Indonesia*, vol.39, no.3,2013, hal 112-123.

A.Suparmi,C, Cari, at el, Approximate Solution of Schrodinger Equation for Modified Posch-Teller plus Trigonometric Rosen-Morse Non-Central Potentials inTerm of Finite Romanovski polynomial, *IOSR Journal of Applied Physics*, vol.2,no.2, 2012,pp. 43-51.

Cari, *Mekanika Kuantum-penyelesian potensial non-central dengan supersimteri,hypergeometri,Nikivarof Uvarof dan Polynomial Romanovski*, UPT Penerbitan; Surakarta Jawa Tengah, 2013.

Cari, Suparmi, at al, Solution of Dirac Equtaion for Cotangent Potential with Coulomb-type Tensor Interaction for Spin and Pseudospin Symetri Using Romanovski polynomial, *makara journal of science* Vol.17, No.3, 2013. hal 93-102.

Suparmi, *Mekanika Kuantum II*, Jurusan Fisika Fakultas MIPA Universitas Sebelas Maret; Surakarta, 2011.

Taskin,Ferhat and Kocak,Gokhan, Spin Symmetric Solution of Dirac equation with Poschl-Teller potential, *Chin.Physic.B*, vol.20,N0.7,2011, hal.070302-5